/

Groupes orthogonaux et sous-groupes auto-adjoints de $GL_n(\mathbf{R})$

8 mars 2017

1 Préambule

Dans tout ce qui suit, n est un nombre entier supérieur ou égal à 2, l'espace euclidien $E = \mathbf{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique noté $<,>$ et dont la norme est notée $|\,|$, $\|\,\|$ est la norme d'opérateur attachée à ce produit scalaire, $\mathcal{S}$ est l'ensemble des matrices symétriques appartenant à $M_n(\mathbf{R})$, et $\mathcal{S}^+$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}$ qui sont *définis* positifs, c'est-à-dire dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.
Lorsque l'on se donne une matrice A appartenant à $\mathcal{S}$ on note q_A l'application définie pour $X \in E$ par $q_A(X) =< AX, X >=^t XAX$ et $O(q_A)$ l'ensemble des matrices $M \in M_n(\mathbf{R})$ telle que ${}^tMAM = A$.

On rappelle aussi que :
— Pour toute matrice symétrique positive S appartenant à $M_n(\mathbf{R})$, il existe une unique matrice symétrique positive S' telle que $S'^2 = S$.
— L'application produit : $O_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{S}^+ \to GL_n(\mathbf{R})$, $(O, S) \to OS$ est un homéomorphisme, appelé décomposition polaire.
— Si K est une partie fermée et bornée d'un evn de dimension finie qui est la réunion d'une famille $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts de K, il existe une partie finie J de I telle que K soit la réunion de la famille $(O_i)_{i\in J}$.
— une norme $\mathcal{N}$ sur E est dite *stricte* lorsque l'égalité $\mathcal{N}(x+y) = \mathcal{N}(x)+\mathcal{N}(y)$ entraîne que x et y sont positivement liés.

2 Exponentielle

2.1

a) Montrer que $S \to \exp(S)$ est une bijection de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}^+$. On note Log la bijection réciproque.
b) On se donne une suite (S_p) d'éléments de $\mathcal{S}^+$ qui converge vers $S \in \mathcal{S}^+$. Montrer que

$$0 < \inf_{p\in\mathbf{N}} \operatorname{spec}(S_p) \leq \sup_{p\in\mathbf{N}} \operatorname{spec}(S_p) < +\infty$$

et en déduire que la suite $\operatorname{Log}(S_p)$ est bornée.

c) Montrer que Log est continue.

d) Soient S et T dans $\mathcal{S}^+$. On suppose que S et T commutent ; montrer que S et $\mathrm{Log}(T)$ commutent.

2.2

On pose, pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ et $p \in \mathbf{N}^*$, $f_p(A) = \left(I_n + \frac{A}{p}\right)^p$. Montrer que la suite (f_p) converge uniformément sur tout compact de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ vers l'exponentielle.

2.3

a) Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$. Prouver que $\|\exp(A) - I - A\| \leq \|A\|^2 \exp(\|A\|)$.
b) Soit $\mathcal{G}$ un sous groupe fermé de $GL_n(\mathbf{R})$. On note, ici et dans la suite, $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ l'ensemble des matrices $M \in M_n(\mathbf{R})$ telles que, pour tout nombre réel t, $\exp(tM) \in \mathcal{G}$. Soient M et N dans $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$.
Montrer que la suite $(\exp(M/p).\exp(N/p))^p$ tend vers $\exp(M+N)$ lorsque p tend vers $+\infty$.
c) En déduire que $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

3 Généralités sur les groupes orthogonaux

Dans tout ce qui suit, la matrice $A \in \mathcal{S}$ est fixée et *inversible.*

3.1

Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$. Prouver que les propriétés suivantes sont équivalentes :
1) $M \in O(q_A)$.
2) Pour tout $X \in E$, $q_A(MX) = q_A(X)$.
3) Pour tout $(X, Y) \in E^2$, $< AMX, MY >=< AX, Y >$.

3.2

Montrer que $O(q_A)$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbf{R})$, stable par transposition dès que $A^2 = I_n$, et dont tous les éléments ont pour déterminant 1 ou -1. On note désormais $SO(q_A)$ le sous-groupe de $O(q_A)$ formé par les éléments de $O(q_A)$ qui ont pour déterminant 1.

3.3

On suppose que $B \in S$ et qu'il existe $P \in GL_n(\mathbf{R})$ telle que $B = {}^tPAP$. Montrer que les groupes $O(q_A)$ et $O(q_B)$ sont conjugués.

4 Groupes $O(p, q)$

On fixe désormais un entier p compris entre 1 et $n-1$, et l'on prend dans cette partie pour A la matrice diagonale dont la diagonale est formée de p fois le nombre 1 suivi de $q = n - p$ fois le nombre -1. Le groupe $O(q_A)$ est alors noté $O(p, q)$. On note $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, F le sev de $\mathbf{R}^n$ engendré par les p premiers vecteurs de la base canonique, et F' son orthogonal. Soit enfin σ la symétrie orthogonale par rapport à F.

4.1

Déterminer le groupe $SO(1,1)$.

4.2

Montrer qu'aucun des groupes $O(p,q)$ n'est compact.

4.3

a) Soit $U \in O_n(\mathbf{R})$, montrer que $U \in O(p,q)$ ssi
1) U commute avec σ ; ou encore ssi
2) U laisse stable F (et son orthogonal F').
b) Soit $S \in \mathcal{S}^+$, $S = \exp(T)$, où $T \in \mathcal{S}$. Montrer que $S \in O(p,q)$ ssi $T(F) \subset F'$ et $T(F') \subset F$. On pourra commencer par prouver que $ATA = -T$. Dans ce cas en déduire que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\exp(tT)$ est dans $O(p,q)$.
c) Soit $V \in O(p,q)$, et soit $V = US$ sa décomposition polaire. Montrer que S^2 et U appartiennent à $O(p,q)$. On pose $\Delta(V) = (\det(U_{|F}), \det(U_{|F'}))$. Montrer que Δ est continue et donner son image.
d) Montrer que $O(p,q)$ possède quatre composantes connexes.

4.4

Soit $B \in S$, inversible. Montrer que $O(q_B)$ est conjugué à $O_n(\mathbf{R})$ ou à l'un des $O(p,q)$, $1 \leq p \leq n-1$.

5 Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbf{R})$

Dans tout ce paragraphe, $\mathcal{G}$ est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbf{R})$.

5.1

a) Soient $a_1, \ldots, a_k$ des points de $\mathbf{R}^n$, avec $k \geq n+2$, et a un point de $\mathbf{R}^n$ qui est combinaison convexe de $a_1, \ldots, a_k$. Montrer que a est aussi combinaison convexe de $k-1$ points pris parmi $a_1, \ldots, a_k$.

b) Soit K un compact de $\mathbf{R}^n$. Montrer que son enveloppe convexe est aussi compacte.

5.2

Soit C un convexe compact non vide $\mathbf{R}^n$, laissé stable par $\mathcal{G}$. On veut montrer que $\mathcal{G}$ possède un point fixe dans C.

a) Soient $U \in L(E)$ tel que $U(C) \subset C$, $x \in C$, et, pour $p \in \mathbf{N}^*$, $y_p = \frac{1}{p+1}(x + \cdots + U^p(x))$. Etudier la suite $U(y_p) - y_p$ (ainsi, personne n'a zéro) et en déduire que U possède un point fixe dans C.
b) Montrer que $x \to \max_{g \in \mathcal{G}} |g(x)|$ définit un norme stricte $\mathcal{N}$ sur $E = \mathbf{R}^n$ pour laquelle les éléments de G sont des isométries.

c) On suppose que les éléments de $\mathcal{G}$ ne possèdent pas de point fixe commun dans C.
i) Montrer qu'il existe des éléments $g_i, i = 1 \dots l$ de $\mathcal{G}$ tel que C soit la réunion des ensembles $O_i = \{x \in C \mid g_i(x)) \neq x\}$, $i = 1, \dots, l$.
ii) Conclure en considérant l'équibarycentre de $g_1, \dots, g_l$.

5.3

On note $\mathcal{Q}$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes homogènes de degré deux de $\mathbf{R}^n$ vers $\mathbf{R}$.
a) Montrer que l'application qui à une matrice $A \in \mathcal{S}$ associe la fonction q_A est une bijection linéaire de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{Q}$.
b) On note $K = \{q_{I_n} \circ M \mid M \in \mathcal{G}\}$. Montrer que K est une partie compacte de $\mathcal{Q}$ dont l'enveloppe convexe C est un compact stable par $\mathcal{G}$, c'est à dire que, pour tout $M \in \mathcal{G}$ et tout $q \in C$, $q \circ M$ est dans C.
c) Prouver qu'il existe $A \in \mathcal{S}^+$ telle que $\mathcal{G}$ soit contenu dans $O(q_A)$.

6 Sous-groupes algébriques stables par transposition

Dans cette dernière section, $\mathcal{G}$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbf{R})$, stable par transposition et tel qu'il existe une famille $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ et polynômes définis sur $M_n(\mathbf{R})$ telle que : $\forall M \in M_n(\mathbf{R}), M \in \mathcal{G} \iff \forall \lambda \in \Lambda, P_\lambda(M) = 0$. Il en résulte donc que $\mathcal{G}$ est fermé.

6.1

a) Soient $b_1, \dots, b_m$, $C_1, \dots, C_m$ des nombres réels tels que :
$\forall k \in \mathbf{Z}$, $\sum_{i=1}^m C_i e^{kb_i} = 0$, montrer que :
$\forall t \in \mathbf{R}$, $\sum_{i=1}^m C_i e^{tb_i} = 0$.
b) Soit S une matrice symétrique telle que $\exp(S) \in \mathcal{G}$; montrer que $\forall t \in \mathbf{R}$, $\exp(tS) \in \mathcal{G}$.

6.2

Soit $V \in \mathcal{G}$, et soit $V = US$ sa décomposition polaire. Montrer que S^2 appartient à $\mathcal{G}$; on écrit : $S = \exp T$ où $T \in \mathcal{S}$, prouver :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \exp(tT) \in \mathcal{G}$$

puis vérifier que $U \in \mathcal{G}$.

6.3

Montrer qu'il existe un sev F de $M_n(\mathbf{R})$ tel que $\mathcal{G}$ soit homéomorphe à $(\mathcal{G} \cap O_n(\mathbf{R})) \times F$.

II EXPONENTIELLE :

Soit $S' \in \mathcal{S}$, il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que : $S' = O \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} O^{-1}$ (réel.)

d'où $\exp(S') = O \begin{pmatrix} e^{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_n} \end{pmatrix} O^{-1} \in S^+$.

Si $S \in \mathcal{S}^+$, il existe $O \in O(\mathbb{R})$ et des réels $r_1 > 0, \dots, r_n > 0$ tels que $S = O \begin{pmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_n \end{pmatrix} O^{-1} = \exp \underbrace{O \begin{pmatrix} \log r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \log r_n \end{pmatrix} O^{-1}}_{S' \in S.}$

Reste à prouver l'injectivité. Soient S', S'' telles que $\exp S' = \exp S'' = S$, et λ une valeur propre (>0) de S ; par continuité des opérations et passage à la limite $[S,S'] = [S,S''] = 0$; notons u et v ~~et w~~ les endomorphismes canoniquement attachés à S, S', S'' resp. Il vient :
$v(E_{\lambda,u}) \subset E_{\lambda,u}$, $w(E_{\lambda,u}) \subset E_{\lambda,u}$ donc :
$$\exp v|_{E_{\lambda,u}} = \exp w|_{E_{\lambda,u}} = \lambda \, Id$$
par diagonalisation des auto-adjoints $v|_{E_\lambda}$ et $w|_{E_\lambda}$ dans $E_{\lambda,u}$: $v|_{E_{\lambda,u}} = w|_{E_{\lambda,u}} = \log \lambda \cdot Id$.
Comme $\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_{\lambda,u} = E$, $v = w$ $\square$

b) On rappelle, pour $S \in S^+$ i) $\max \operatorname{spec} S = \max_{\|x\|=1} \langle Sx \mid x \rangle$
ii) $\min \operatorname{Spec} S = \min_{\|x\|=1} \langle Sx, x \rangle$

De plus, la convergence de S_p vers S équivaut à la convergence uniforme de $S_p|_\Sigma$ vers $S|_\Sigma$ où :
$\Sigma = \{ x \in E \mid \|x\| = 1 \}$.
Notons $\alpha = \min \operatorname{spec}(S)$, $\beta = \max \operatorname{spec}(S)$, choisissons $p_0 \in \mathbb{N}$ tq : $\forall p \geq p_0$, $\|S_p - S\|_{\infty,\Sigma} \leq \frac{\alpha}{2}$
il vient : $\forall p \geq p_0$, $\frac{\alpha}{2} \leq \|S_p\|_\infty \leq \beta + \frac{\alpha}{2}$
donc, pour tout $p \geq p_0$, le spectre de S_p appartient à $[\frac{\alpha}{2}, \beta + \frac{\alpha}{2}]$. Le résultat suit facilement.

** Avec le premier point, les valeurs propres des $\operatorname{Log} S_p$ prennent leurs valeurs dans un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Il en résulte que la suite $\operatorname{Log} S_p$ est bornée, pour prouver qu'elle converge vers $\operatorname{Log} S$, il suffit donc de montrer que $\operatorname{Log} S$ est sa seule valeur d'adhérence. Or si $\operatorname{Log} S_{\varphi(p)} \to S'$ il vient, par continuité de exp : $S_{\varphi(p)} \longrightarrow \exp S'$, donc $\exp S' = S$ et $S' = \operatorname{Log} S$ □

d) Écrivons, $T = O \begin{pmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_n \end{pmatrix} O^{-1}$, $r_i > 0$, $O \in O_n(\mathbb{R})$

$\operatorname{Log} T = O \begin{pmatrix} \operatorname{Log} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \operatorname{Log} r_n \end{pmatrix} O^{-1}$; soit P un interpolateur de Lagrange tel que $P(r_k) = \operatorname{Log} r_k$ $k = 1, \dots, n$, il vient, $P(T) = \operatorname{Log} T$, donc $[S, \operatorname{Log} T] = [S, P(T)] = 0$ □

<u>2.2</u> Soit $p \in \mathbb{N}^*$, il vient,

$$\left(I + \frac{A}{p}\right)^p = \sum_{k=0}^{p} \frac{C_p^k}{p^k} A^k = \sum_{k=0}^{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{p}\right) \frac{A^k}{k!}$$

Soit : K un compact de $M_n(\mathbb{R})$, $\alpha = \sup_{A \in K} \|A\|$, et pour $A \in K$, $u_{p,k}(A) = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{p}\right) \cdot \frac{A^k}{k!}$ $(0 \leq k \leq p)$; 0 sinon

il vient : $\forall (k,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $\forall A \in K$, $\|u_{p,k}(A)\| \leq \frac{\alpha^k}{k!}$ et $\sum \frac{\alpha^k}{k!}$ converge, de là, pour $A \in K$:

$$\left\| e^A - \sum_{k=0}^{p} \right\| \leq \sum_{k=0}^{p} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{p}\right)\right) \frac{\alpha^k}{k!} + \sum_{p+1}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!}$$

Soit $\varepsilon > 0$, fixons $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\sum_{p_0+1}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \leq \varepsilon$ il vient pour $p \geq p_0$: $\left\| e^A - \sum_{k=0}^{p} u_{p,k}(A) \right\| \leq \sum_{k=0}^{p_0} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{p}\right)\right) \frac{\alpha^k}{k!} + \varepsilon$

or $\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=0}^{p_0} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{p}\right)\right) \frac{\alpha^k}{k!} = 0$ (somme finie !)

donc, pour p assez grand ; $\forall A \in K$, $\left\| e^A - \left(I + \frac{A}{p}\right)^p \right\| \leq 2\varepsilon$.

Etude de $\left(\exp \frac{M}{p} \cdot \exp \frac{N}{p}\right)^p$.

* $\| e^A - I - A \| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} \leq \|A\|^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|A\|^{k-2}}{k!} \leq \frac{\|A\|^2}{2} e^{\|A\|}$.

** On a : $\exp\frac{M}{p} \cdot \exp\frac{N}{p} = \left(I + \frac{M}{p} + \alpha_p\right)\left(I + \frac{N}{p} + \beta_p\right)$

avec : $\exists C > 0\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \|\alpha_p\| + \|\beta_p\| \leq \frac{C}{p^2}$

Ainsi : $\left(\exp\frac{M}{p} \exp\frac{N}{p}\right)^p = I + \frac{M+N}{p} + \gamma_p$ avec :

$\exists D > 0\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \|\gamma_p\| \leq \frac{D}{p^2}$.

De façon "évidente" (tri des termes ..)(coeff ≥ 0 ..)

$\left\| \left(I + \frac{M+N}{p} + \gamma_p\right)^p - \left(I + \frac{M+N}{p}\right)^p \right\|$

$\leq \left(1 + \frac{\|M+N\|}{p} + \|\gamma_p\|\right)^p - \left(1 + \frac{\|M+N\|}{p}\right)^p$

$= \exp p \log\left(1 + \frac{\|M+N\|}{p} + \|\gamma_p\|\right) - \exp\left(p \log\left(1 + \frac{\|M+N\|}{p}\right)\right)$

$\leq \exp\left(\|M+N\| + O\left(\frac{1}{p}\right)\right) - \exp\left(\|M+N\| + \tilde{O}\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)$

qui tend vers 0.

*** Soient M et N dans $\mathcal{L}_G$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$\exp\frac{M}{p}$ et $\exp\frac{N}{p}$ sont dans G qui est un groupe $\times$,

donc $\left(\exp\left(\frac{M}{p}\right) \cdot \exp\left(\frac{N}{p}\right)\right)^p$ aussi. Or G est un

sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$, donc, par passage

à la limite : $\exp(M+N) \in G$.

En remplaçant M par tM, N par tN, on voit que :

$\forall t \in \mathbb{R},\ \exp(t(M+N)) \in G$

donc $M+N \in \mathcal{L}_G$.

III GROUPES ORTHOGONAUX

3.1. 1) ⇒ 2) Soit $X \in \mathbb{R}^n$, il vient :

$$q_A(MX) = {}^tX{}^tMAMX \underset{\text{Déf}}{=} {}^tXAX$$

2) ⇒ 3) Par dédoublement des termes ; soit $(X, Y) \in E^2$, selon 2) :

$${}^t(X+Y){}^tMAM(X+Y) = {}^t(X+Y)A(X+Y)$$

après simplification tenant compte de $q_A(MX) = q_A(X)$, $q_A(MY) = q_A(Y)$:

$${}^tX{}^tMAMY + {}^tY{}^tMAMX = {}^tXAY + {}^tYAX$$

or : ${}^tY{}^tMAMX = {}^t({}^tY{}^tMAMX) = {}^tX{}^tMAMY$, etc.

donc : $2\langle AMX, MY\rangle = 2\langle AX, Y\rangle$ □

3) ⇒ 2) ⇒ 1) sont clairs.

3.2 • Soit $M \in O(q_A)$, il vient : $(\det M)^2 \det A = \det A$

donc $\det M \in \{-1, 1\}$ et M est inversible.

•• La stabilité de $O(q_A)$ par produit est immédiate, enfin $I \in O(q_A)$ et si $M \in O(q_A)$

$${}^t(M^{-1})AM^{-1} = {}^tM^{-1}({}^tMAM)M^{-1} = A$$

donc $M^{-1} \in O(q_A)$.

••• Si $A^2 = I$; ${}^tMAM = A$ donne : $M^{-1}A^{-1}{}^tM^{-1} = A^{-1}$

soit $M^{-1}A\,{}^tM^{-1} = A$ et donc : ${}^tM^{-1} \in O(q_A)$ puis ${}^tM \in O(q_A)$

3.3 Soit $M \in O(q_B)$, on a :

$${}^tMBM = B \text{ soit } {}^tM{}^tPAPM = {}^tPAP \text{ ou encore}$$

$${}^t(PMP^{-1})A(PMP^{-1}) = A \text{ i.e. : } PMP^{-1} \in O(q_A)$$

Réciproque immédiate, d'où $O(q_B) = P^{-1}O(q_A)P$.

GROUPES $O(p,q)$

Dans ce qui suit, $A = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}p \\ \}q = n-p \end{matrix}$

4.1 La matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est dans $SO(1,1)$ ssi,

$\det M = 1$ et ${}^t\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ soit,

$ad - bc = 1$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

ou encore : $a^2 - b^2 = 1$, $ac = bd$ $c^2 - d^2 = -1$, $ad - bc = 1$;

posons $a = \operatorname{ch} u$, $b = \operatorname{sh} u$, $c = \operatorname{sh} v$, $d = \operatorname{ch} v$ il vient,

$1 = \operatorname{ch}(u-v)$ donc $u = v$ soit $M = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} u & \operatorname{sh} u \\ \operatorname{sh} u & \operatorname{ch} u \end{pmatrix}$ $\square$

4.2 $O(p,q)$ contient $\begin{array}{c} \quad\quad\quad p \quad p+1 \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \operatorname{ch} u & -\operatorname{sh} u & & \\ & & & \operatorname{sh} u & \operatorname{ch} u & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & -1 \end{pmatrix} \end{array}$

donc n'est pas borné.

4.3. Par définition : ${}^tU = U^{-1}$ et

$u \in O(q_A) \iff {}^tUAU = A \iff U^{-1}AU = A$

donc $U \in O(p,q) \iff AU = UA \iff u \circ \sigma = \sigma \circ u$

$(u = f_U)$ Or u commute avec la symétrie σ

ssi u laisse stables F et F', comme u est orthogonal

et $F' = F^{\perp}$, cela revient à dire que $u(F) \subset F$.

b) $A = A^{-1}$ donne la stabilité de $O(p,q)$ par transposition

Il en résulte que : $US \in O(p,q) \Rightarrow SU^{-1} \in O(p,q)$

$\Rightarrow SU^{-1}US = S^2 \in O(p,q)$

c) $S \in O(p,q) \iff \exp T \cdot A \exp T = A$ avec $A^{-1} = A$

$\iff A \exp T A = \exp(-T)$

$\iff \exp(ATA) = \exp(-T)$ où $ATA \in S$

$\underset{\text{I}}{\iff}$ $ATA = -A$.

On décompose $x \in E$ comme $x = x_F + x_{F'}$ où $(x_F, x_{F'}) \in F \times F'$

il vient : $AT A(x_F) = -T(x_F)$ donc $AT(x_F) = -T(x_F)$ et donc $T(x_F) \in F'$. De même, $T(x_{F'}) \in F$.

La réciproque vient de la décomposition précédente.

.. Soit $t \in \mathbb{R}$, tT vérifie aussi $tT(F) \subset F'$, $tT(F') \subset F$, donc $\exp(tT) \in O(p,q)$.

... Si $S^2 \in O(p,q)$, avec $S^2 = \exp(T')$, $T' \in S$ il vient d'après ce qui précède $S = \exp(\frac{1}{2}T') \in O(p,q)$.

De là vient : $U = VS^{-1} \in O(p,q)$

.... Δ est continue car la décomposition polaire l'est, ainsi que le déterminant qui est un polynôme.

Clairement, $\operatorname{Im}\Delta \subset \{-1,1\}^2$, le caractère surjectif de Δ est immédiat avec a)

d) Avec ce qui précède, $O(p,q)$ possède au moins quatre composantes connexes. Montrons que, si $\delta \in \{-1,1\}^2$ est fixé, $O_\delta = \{V \in O(p,q) \mid \Delta(V) = \delta\}$ est connexe :

i) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $SO_m(\mathbb{R})$ est connexe par arcs (cours) (AHP)

ii) Si $V \in O_\delta$, avec par exemple $\delta = (1,-1)$, $V = US$ il existe un arc joignant U à $\begin{pmatrix} I_{p-1} & \\ & \ddots \end{pmatrix}$ dans $SO_p(\mathbb{R}) \times \{O_q(\mathbb{R}) \setminus SO_q(\mathbb{R})\}$, car $O_m(\mathbb{R}) \setminus SO_m(\mathbb{R})$ est lui aussi CPA.

iii) avec les notations de ii), $S = \exp T$ où : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exp(tT) \in O(p,q)$.

__Bilan__ $t \to \gamma(t) \cdot \exp(tT)$ est un arc joignant V à $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ dans O_δ $\square$

4.4 Soient $d_1, \dots, d_p$ les vp > 0 de B, $d_{p+1}, \dots, d_m$ les vp < 0 il vient : $B = {}^tO \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_p & \\ & & & d_{p+1} \ddots \end{pmatrix} O^{-1} = {}^tO\,{}^tP \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots -1 \end{pmatrix} OP$

7

où $P = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \sqrt{d_p} & & \\ & & & \sqrt{-d_{p+1}} & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & \sqrt{-d_n} \end{pmatrix}$; ainsi : $B = {}^t(OP)AOP$

et l'on conclut avec $\overline{\text{III}} - 3$.

Complément : groupe orthochrone (WIP)

SOUS-GROUPES COMPACTS DE $GL_n(\mathbb{R})$

V - 1) Cours. Cf. le théorème de Carathéodory

2) a) Calcul classique :

$\| U y_p - y_p \| = \| \frac{U^{p+1}(x) - x}{p+1} \| \leq \frac{\text{diam}\, C}{p+1}$ car C est borné.

Comme C est compact, il existe $\varphi \uparrow_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$y_{\varphi(p)} \to y \in C$. De là, $U y_{\varphi(p)} \to y$, et par continuité de U : $Uy = y$.

b). N est bien définie car G est borné non vide, elle est visiblement sous-additive et homogène, et comme $Id \in G$ l'axiome de séparation est vérifié.

.. N est stricte : soit $(x, y) \in E^2$ tel que $N(x+y) = N(x) + N(y)$; par compacité de G il existe $g \in G$ tel que $N(x+y) = \| g(x+y) \|_2$

d'où : $N(x) + N(y) = \| g(x) + g(y) \|_2 \leq \| g(x) \|_2 + \| g(y) \|_2$
$\leq N(x) + N(y)$; de là, $N(x) = \| g(x) \|_2$, $N(y) = \| g(y) \|_2$
$\| g(x) + g(y) \|_2 = \| g(x) \|_2 + \| g(y) \|_2$; comme $\| \, \|_2$ est stricte, $g(x)$ et $g(y)$ sont liés donc aussi x et y car $g \in GL(E)$ □

... Enfin, si $h \in G$, $g \to gh$ est une bijection de G donc $N(hx) = N(x)$.

c) L'hypothèse se traduit par :

$$\forall x \in C, \exists g \in G, g(x) \neq x$$

Donc $C_1 = \bigcup_{g \in G} \{ x \in C_1 \mid g(x) \neq x \}$, les ensembles figurant dans la réunion sont des ouverts de C_1 qui est par hypothèse compact ; selon Borel-Lebesgue (admis) il existe $g_1, \dots, g_p \in G$ tels que :

$$C'_1 = \bigcup_{i=1,\dots,l} \{x \in C'_1 \mid g_i(x) \neq x\}$$

Notons $U = \frac{1}{l}(g_1 + \dots + g_l)$; puisque C_1 est convexe, U laisse stable C'_1 donc avec a) : $\exists x \in C'_1$, $Ux = x$

soit : $g_1(x) + \dots + g_l(x) = \underbrace{x + \dots + x}_{l \text{ fois}}$.

De là : $N(g_1(x)) + \dots + N(g_l(x)) = l N(x)$ (car g_i est une isométrie pour N) $= N(g_1(x) + \dots + g_l(x))$.

Or N est stricte, $g_1(x), \dots, g_l(x)$ sont sur une même demi-droite d'origine O ; de même norme donc <u>égaux</u> il vient, $l g_i(x) = lx$ soit $g_i(x) = x$ $i = 1 \dots l$ NON !

3°) a) Pour $A \in S_n(\mathbb{R})$, un calcul facile donne, pour $X = {}^t(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle AX, X\rangle = {}^tXAX = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

Il est clair que tout élément F de Q s'écrit sous cette forme ; l'unicité vient de ce que :

$$a_{ij} = \frac{1}{2}\left(q_A(\varepsilon_i + \varepsilon_j) - q(\varepsilon_i) - q(\varepsilon_j)\right)$$

Comme $A \to q_A$ est visiblement linéaire, c'est un isomorphisme.

b) Nous sommes en dimension finie, donc l'isomorphisme précédent est continu. L'image de G est donc un compact ; moyennant le théorème de Caratheodory, son enveloppe convexe C'_1 est aussi compact.

c) Il est évident que, si $G \in \mathcal{G}$,

$$\{q_{A\circ G} \mid A \in \mathcal{G}\} = \{q_B \mid B \in \mathcal{G}\}$$

car $A \to A \circ G$ est une bijection de $\mathcal{G}$.

Par combinaison convexe et linéarité de $q_A \to q_A \circ M$, C'_1 est stable par $\mathcal{G}$.

Observons aussi que, si $B = \sum_1^m \lambda_i M_i \in \mathcal{G}$ | $\lambda_i \geq 0$, $\sum_1^m \lambda_i = 1$, $M_i \in \mathcal{G}$

. On a, pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

$$q_B(X) = \langle BX, X\rangle \geq \left(\sum_1^m \alpha_i\right) \min_{1\leq i\leq m} \underbrace{\langle BX_i, X_i\rangle}_{>0} \geq 0$$

donc tout élément q_B de C'_1 est défini positif.

Avec 5-1) et 5-2) il existe $q_B \in C'_1$ telle que :

$$\forall M \in \mathcal{G},\ q_B \circ M = q_B$$

i.e. $\quad \forall M \in \mathcal{G},\ M \in O(q_B)$ □

$\underline{\text{VI}}$

6.1) a) Sans nuire à la généralité, on peut supposer $b_1, \ldots, b_m$ deux à deux distincts ; avec $k = 1, \ldots, m$ on obtient une matrice de Vandermonde W inversible telle que $W\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $c_1 = \cdots = c_m = 0$.

NB On peut aussi appliquer le théorème de Dirichlet sur l'indépendance des morphismes $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$

6.1) b) Diagonalisons S : $S = O\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} O^{-1}$.

Lorsque $\lambda \in \Lambda$, notons $\tilde{P}_\lambda$ le polynôme $M \to P_\lambda(OMO^{-1})$; on a, pour tout $M \in M(\mathbb{R})$

$$OMO^{-1} \in \mathcal{G} \iff \forall \lambda \in \Lambda,\ \tilde{P}_\lambda(M) = 0.$$

Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \tilde{P}_\lambda\begin{pmatrix} e^{k\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{k\lambda_m} \end{pmatrix} = P_\lambda(S'^k) = 0 \text{ où } S' = e^S.$$

or : $\left(\begin{array}{l} \exists c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R} \\ \exists b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R} \end{array}\right.$, $\forall k$, $\tilde{P}_\lambda\begin{pmatrix} e^{k\lambda_1} & \\ & e^{k\lambda_m} \end{pmatrix} = \sum_1^m c_i e^{kb_i}$

car un monôme $(e^{k\lambda_1})^{\alpha_1} \ldots (e^{k\lambda_m})^{\alpha_m}$ est de la forme $e^{k(\alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_m\lambda_m)}$. Avec 6-1-a) il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \tilde{P}_\lambda\begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_m} \end{pmatrix} = 0 \text{ donc :}$$

$P_\lambda(e^{tS}) = 0$, λ étant quelconque il vient

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e^{tS} \in \mathcal{G}.$$

6.2 Comme $\mathcal{G}$ est stable par transposition,

$$V \in \mathcal{G} \Rightarrow {}^tVV \in \mathcal{G} \Rightarrow S^2 \in \mathcal{G}.$$

On écrit alors, $S^2 = \exp(2T)$, avec b) il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(2tT) \in \mathcal{G}$$

et donc, $S = \exp\left(\frac{1}{2} 2T\right) \in \mathcal{G}$.

Il vient ensuite : $\quad U = VS^{-1} \in \mathcal{G}$.

6.3 Notons $F = \{T \in \mathcal{S} \mid \exp T \in \mathcal{G}\}$.

D'après la partie I, et 6.1. b), F est un sev de $\mathcal{S}$.

Posons : $\mathcal{G} \cap \underset{\sim}{O}(\mathbb{R}) = \mathcal{U}$; l'application :

$$\mathcal{U} \times F \to \mathcal{G}, \ (U, T) \mapsto U\exp(T)$$

est un homéomorphisme de $\mathcal{U} \times F$ sur son image

qui n'est autre que $\mathcal{G}$ $\square$